



Tạp chí Khoa học Kỹ thuật Mỏ - Địa chất

Trang điện tử: <http://tapchi.humg.edu.vn>



Khả năng ứng dụng một số phép lọc cho phương trình phi tuyến sử dụng trong định vị

Phạm Trung Dũng^{1,*}, Dương Thành Trung¹

Khoa Trắc địa - Bản đồ và Quản lý đất đai, Trường Đại học Mỏ - Địa chất, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

TÓM TẮT

Quá trình:

Nhận bài 15/3/2017
Chấp nhận 25/6/2017
Đăng online 31/8/2017

Từ khóa:

Lọc Kalman
Lọc Kalman mở rộng
Lọc Unscented Kalman
Lọc hạt (Particle filter)
Monte Carlo
Phương trình phi tuyến

Đối với mục đích định vị, các phép lọc Kalman mở rộng (Extended Kalman Filter - EKF), Unscented Kalman Filter (UKF) và lọc hạt (Particle filter-PF) được ứng dụng xác định vị trí cho đối tượng chuyển động. Đối với phương trình có tính phi tuyến cao kết hợp với nhiễu có tính phi chuẩn Gauss sẽ làm giảm độ chính xác của EKF. Để khắc phục những hạn chế đó, nghiên cứu này tập chung vào việc đánh giá khả năng ứng dụng của các phép lọc phi tuyến, phi chuẩn Gauss, bao gồm UKF và PF. Sai số trung phương vị trí điểm (Root Mean Square Error - RMSE) và thời gian thực hiện là hai yếu tố để quyết định cho khả năng áp dụng của các phép lọc nêu trên. Thông qua thực nghiệm cho thấy phép lọc hạt là phù hợp nhất cho hệ phương trình phi tuyến với nhiễu phi chuẩn Gauss, độ chính xác có thể đạt tốt hơn khoảng 5 lần và 9 lần so với UKF và EKF, tương ứng. Đối với nhiễu chuẩn Gauss, UKF cho độ chính xác cao hơn EKF khoảng 1,5 lần. Khi xét tới thời gian thực hiện, EKF cho phép tính toán nhanh nhất còn PF cần nhiều thời gian nhất do việc sinh mẫu trong quá trình thực hiện.

© 2017 Trường Đại học Mỏ - Địa chất. Tất cả các quyền được bảo đảm.

1. Mở đầu

Thuật toán ước lượng đối với hệ phương trình phi tuyến sử dụng trong định vị đã được nghiên cứu trong nhiều năm. (Kalman, 1960) đề xuất một thuật toán được biết với tên gọi phép lọc Kalman, phép lọc này được áp dụng cho phương trình tuyến tính với nhiễu tuân theo luật phân bố chuẩn Gauss. Tuy nhiên, hầu hết các phương trình sử dụng thực tế là phi tuyến tính, do đó kỹ thuật tính toán này chưa thể áp dụng được. Để khắc phục những nhược điểm kể trên (Anderson and

Moore, 1979) đã phát triển một phương pháp mới trên cơ sở mở rộng từ thuật toán lọc của Kalman có tên gọi là phép lọc Kalman mở rộng (Extended Kalman Filter-EKF). Phép lọc Kalman mở rộng thực hiện phép tuyến tính hóa cho phương trình phi tuyến để thu được phương trình ở dạng tuyến tính. Tuy nhiên nhược điểm của phương pháp là việc tuyến tính hóa kém chính xác khi áp dụng cho phương trình có mức độ phi tuyến cao. Để khắc phục nhược điểm này (Julier and Uhlmann, 1997) đề xuất phép lọc Unscented Kalman (UKF) mà không sử dụng bước tuyến tính hóa. Độ chính xác của phương pháp này tương đương với phương pháp Kalman suy rộng nếu sử dụng đến các hệ số bậc hai từ khai triển Taylor.

*Tác giả liên hệ

E-mail: phamtrungdung@humg.edu.vn

Thuật toán này mặc dù giải quyết được cho các phương trình có mức phi tuyến cao nhưng vẫn được xây dựng trên giả thiết nhiễu tuân theo phân bố chuẩn Gauss giống như pháp lọc Kalman. Phương pháp lọc hạt Particle filter (PF) được đề xuất nhằm mở rộng khả năng tính toán cho các mô hình phi tuyến khi nhiễu không tuân theo phân bố chuẩn Gauss. Một số phương pháp phổ biến được phát triển từ thuật toán lọc hạt có thể nêu ra bao gồm phương pháp Bootstrap (Gordon, 1993) và Sequence Monte Carlo (Liu and Chen, 1998). Phép lọc sử dụng trong lĩnh vực trắc địa đã được biết tới qua nhiều nghiên cứu, trong đó có thể nêu ra một số công bố tiêu biểu như: (Ramm, 2008) áp dụng phép lọc Kalman cho định vị giao thông với trị đo thu được bởi hệ thống GPS và các cảm biến giá rẻ; (Alkhatib, 2008) so sánh ba thuật toán EKF, UKF và PF cho phương trình phi tuyến với nhiễu tuân theo phân bố chuẩn Gauss; So sánh hai mô hình hệ thống phi tuyến gồm phương trình đường thẳng và đường cong được đề cập bởi (Schweitzer, 2012). Đối với hệ phương trình phi tuyến của trị đo đã được đề cập trong nghiên cứu của (Aussems, 1999; Stemberg, 2000; Julier and Uhlman, 2004; Särkkä, 2013).

Trong bài báo, hệ phương trình phi tuyến được áp dụng cho cả phương trình hệ thống và phương trình trị đo mở rộng đối với phi chuẩn Gauss.

Mục hai của bài báo đề cập nguyên lý của ba phương pháp EKF, UKF và PF cho phương trình phi tuyến. Trong mục ba, ứng dụng phép lọc cho định vị với phương trình phi tuyến động của hệ thống và phương trình phi tuyến của trị đo. Mục bốn nêu kết quả độ chính xác và thời gian thực hiện của ba phép lọc nêu trên.

2. Nguyên lý của phép lọc

2.1. Phép lọc Kalman mở rộng (EKF)

Phép lọc Kalman mở rộng được sử dụng cho phương trình phi tuyến cho mô hình hệ thống và trị đo (Anderson and Moore, 1997) có dạng như sau:

$$y_{k+1} = \phi(y_k, u_k, w_k), \quad (1)$$

$$l_{k+1} = \varphi(y_{k+1}, v_{k+1}), \quad (2)$$

Trong đó, l_{k+1} là véc tơ trị đo, y_{k+1} là véc tơ trạng thái tại thời điểm $k+1$, u_k là véc tơ ảnh hưởng do ngoại cảnh, và w_k, v_{k+1} là nhiễu của hệ thống và nhiễu của trị đo, chúng được giả định là

độc lập và tuân theo luật phân bố chuẩn Gauss. Hàm ϕ , φ là quy ước cho hàm phi tuyến của hệ thống và trị đo, tương ứng. Thuật toán được thể hiện theo hai bước sau:

Bước 1. Tiên đoán

Véc tơ trạng thái biểu diễn bởi phương trình:

$$\bar{y}_{k+1} = \phi(\hat{y}_k) \quad (3)$$

Ma trận hiệp phương sai của véc tơ trạng thái (coi như không có ảnh hưởng của ngoại cảnh) theo công thức (4):

$$\Sigma_{\bar{y}_{k+1}\bar{y}_{k+1}} = T_k \Sigma_{\hat{y}_k \hat{y}_k} T_k^T + S_k \Sigma_{w_k w_k} S_k^T, \quad (4)$$

Trong đó ma trận chuyển trạng thái $T_k = \left(\frac{\partial \phi(y_k, u_k, w_k)}{\partial y_k} \right)$, ma trận nhiễu động thái $S_k = \left(\frac{\partial \phi(y_k, u_k, w_k)}{\partial w_k} \right)$ và ma trận hiệp phương sai sai số của trị đo $\Sigma_{w_k w_k}$.

Bước 2. Cập nhật trị đo

Véc tơ trị đo được tính thông qua véc tơ trạng thái bởi công thức:

$$\bar{l}_{k+1} = \varphi(\bar{y}_{k+1}) \quad (5)$$

được sử dụng để tính véc tơ cải chính

$$d_{k+1} = l_{k+1} - \bar{l}_{k+1}. \quad (6)$$

Để tính ma trận hiệp phương sai tương ứng của véc tơ cải chính trong công thức (6) cần áp dụng luật truyền sai số với ma trận trị đo được tuyến tính hóa $A_{k+1} = \left(\frac{\partial \varphi(y_{k+1}, v_{k+1})}{\partial y_{k+1}} \right)$ bởi:

$$\Sigma_{d_{k+1} d_{k+1}} = A_{k+1} \Sigma_{\bar{y}_{k+1} \bar{y}_{k+1}} A_{k+1}^T + \Sigma_{l_{k+1} l_{k+1}}, \quad (7)$$

Trong đó, $\Sigma_{l_{k+1} l_{k+1}}$ là ma trận hiệp phương sai của trị đo.

Véc tơ trạng thái cập nhật và ma trận hiệp phương sai tương ứng của nó được tính theo các công thức sau:

$$\hat{y}_{k+1} = \bar{y}_{k+1} + K_{k+1} d_{k+1}, \quad (8)$$

$$\Sigma_{\hat{y}_{k+1} \hat{y}_{k+1}} = \Sigma_{\bar{y}_{k+1} \bar{y}_{k+1}} - K_{k+1} \Sigma_{d_{k+1} d_{k+1}} K_{k+1}^T \quad (9)$$

Trong đó ma trận hữu ích được tính bởi

$$K_{k+1} = \Sigma_{\bar{y}_{k+1} \bar{y}_{k+1}} A_{k+1}^T \Sigma_{d_{k+1} d_{k+1}}^{-1} \quad (10)$$

2.2. Phép lọc Unscented Kalman (UKF)

Thuật toán Unscented Kalman (Julier and Uhlmann, 1997) sử dụng cho phương trình hệ thống và phương trình trị đo trong công thức (1) và (2) được nêu theo quy trình như sau:

2.2.1. Sinh mẫu điểm và xác định trọng số

Tạo $(2n+1)$ mẫu điểm (sigma-points) bằng cách sử dụng véc tơ trạng thái và ma trận hiệp phương sai của véc tơ trạng thái như sau:

$$\mathbf{r}_k = \left[\hat{\mathbf{y}}_k \quad \hat{\mathbf{y}}_k \pm \sqrt{n + \lambda} \cdot \sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{y}}_k \hat{\mathbf{y}}_k}} \right] \quad (11)$$

Trong đó, n là số hàng của véc tơ trạng thái $\hat{\mathbf{y}}_k$, tại trạng thái k và $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{y}}_k \hat{\mathbf{y}}_k}$ là ma trận hiệp phương sai tương ứng. Trọng số của mỗi một mẫu điểm được xác định theo công thức:

$$W_0^{(m)} = \lambda / (n + \lambda),$$

$$W_0^{(c)} = \lambda / (n + \lambda) + (1 - \alpha^2 + \beta), \quad (12)$$

$W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = 1/2(n + \lambda) \quad i = 1, \dots, 2n$
và hệ số tỉ lệ vô hướng được xác định là $\sqrt{n + \lambda}$ với λ được tính:

$$\lambda = \alpha^2(n + \kappa) - n, \quad (13)$$

Trong đó, các tham số $\alpha, \beta, \lambda, \kappa$ được xác định như sau:

Tham số α để xác định bề rộng của phân bố các mẫu điểm xung quanh giá trị trung bình (mean value) và có giá trị trong khoảng 10^{-4} tới 1. Tham số κ để xác định tỉ lệ và thường được chọn giá trị là $3-n$. Đối với phân bố chuẩn Gauss β được lấy bằng 2 (Wan and Van der Merwe, 2002).

2.2.2. Tiên đoán

Mỗi mẫu điểm (sigma-points) được tính truyền qua phương trình phi tuyến ϕ bởi:

$$\mathbf{x}_k^{(i)} = \phi(\mathbf{r}_k^{(i)}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2n. \quad (14)$$

Giá trị trung bình và ma trận hiệp phương sai của véc tơ trạng thái có thể được xác định thông qua những mẫu điểm sau khi tính toán bởi công thức (14), nếu không tính đến ảnh hưởng của sai số hệ thống, được:

$$\bar{\mathbf{y}}_{k+1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \mathbf{x}_k^{(i)} \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{y}}_{k+1} \bar{\mathbf{y}}_{k+1}} = \mathbf{S}_k \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k} \mathbf{S}_k^T + \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (\mathbf{x}_k^{(i)} - \bar{\mathbf{y}}_{k+1})(\mathbf{x}_k^{(i)} - \bar{\mathbf{y}}_{k+1})^T \quad (16)$$

2.2.3. Cập nhật trị đo

Các mẫu điểm tiếp tục được truyền thông qua phương trình phi tuyến của trị đo, φ :

$$\boldsymbol{\psi}_{k+1}^{(i)} = \varphi(\mathbf{x}_{k+1}^{(i)}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2n \quad (17)$$

Trong đó, $\boldsymbol{\psi}$ là ma trận tạo bởi các mẫu điểm đã được tính từ công thức (17).

Giá trị dự đoán của trị đo được tính bởi:

$$\bar{\mathbf{l}}_{k+1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \cdot \boldsymbol{\psi}_{k+1}^{(i)} \quad (18)$$

(Julier and Uhlman, 1997) trình bày cách tính ma trận hiệp phương sai của giá trị ước lượng đo $\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{l}}_{k+1} \bar{\mathbf{l}}_{k+1}}$ bằng cách sử dụng ma trận hiệp phương sai của trị đo $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{l}_{k+1} \mathbf{l}_{k+1}}$ tại trạng thái $k+1$ như sau:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{l}}_{k+1} \bar{\mathbf{l}}_{k+1}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{l}_{k+1} \mathbf{l}_{k+1}} + \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (\boldsymbol{\psi}_{k+1}^{(i)} - \bar{\mathbf{l}}_{k+1})(\boldsymbol{\psi}_{k+1}^{(i)} - \bar{\mathbf{l}}_{k+1})^T, \quad (19)$$

Ma trận hiệp phương sai giữa giá trị ước lượng đo và véc tơ trạng thái được xác định

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{l}}_{k+1} \bar{\mathbf{y}}_{k+1}} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (\mathbf{x}_{k+1}^{(i)} - \bar{\mathbf{y}}_{k+1})(\boldsymbol{\psi}_{k+1}^{(i)} - \bar{\mathbf{l}}_{k+1})^T \quad (20)$$

Từ đó, ma trận hiệu ích lọc \mathbf{K} , được định nghĩa theo công thức:

$$\mathbf{K}_{k+1} = \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{l}}_{k+1} \bar{\mathbf{y}}_{k+1}} (\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{l}}_{k+1} \bar{\mathbf{l}}_{k+1}})^{-1}. \quad (21)$$

Cuối cùng, giá trị véc tơ trạng thái và ma trận hiệp phương sai của véc tơ trạng thái được tính thông qua các công thức (22) và (23) dưới đây:

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1} = \bar{\mathbf{y}}_{k+1} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{l}_{k+1} - \bar{\mathbf{l}}_{k+1}), \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{y}}_{k+1} \hat{\mathbf{y}}_{k+1}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{y}}_{k+1} \bar{\mathbf{y}}_{k+1}} - \mathbf{K}_{k+1} \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{l}}_{k+1} \bar{\mathbf{l}}_{k+1}} \mathbf{K}_{k+1}^T, \quad (23)$$

với \mathbf{l}_{k+1} là véc tơ của trị đo tại trạng thái $k+1$.

2.3. Phép lọc hạt (Particle Filter)

Thuật toán lọc tổng quát dựa vào phương pháp Monte Carlo liên tục ra đời với nhiều tên gọi khác nhau. Phương pháp Bootstrap được Efron đề xuất vào khoảng cuối những năm 1970 (Efron, 1979); phương pháp tái lấy mẫu (Sampling Importance Resampling - SIR) đề xuất bởi Gordon (1993); Pitt and Shephard (1999) phát triển phương pháp lọc hỗ trợ Auxiliary Particle để giải quyết những hạn chế của phép lọc SIR; Liu và Chen (1998) đề xuất phương pháp lọc Sequential Monte Carlo; Doucet và nnk (2000) đưa ra phương pháp Sequential Importance Sampling (SIS). Gần đây các phương pháp này được thống nhất gọi tên là phép lọc hạt. Phép lọc hạt dựa trên phương pháp tái lấy mẫu SIR được trình bày như sau:

Hàm dự đoán mật độ phân bố xác suất $P(\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{l}_{1:k})$ có thể được xác định bằng cách

sử dụng mô hình xác suất của véc tơ xác suất chuyển trạng thái $P(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{y}_k)$ được biểu diễn:

$$P(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{l}_{1:k}) = \int P(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{y}_k)P(\mathbf{y}_k|\mathbf{l}_{1:k})d\mathbf{y}_k \quad (24)$$

Trong đó: $\mathbf{l}_{1:k} = \{l_1, l_2, \dots, l_k\}$.

Hàm phân phối $P(\mathbf{y}_k|\mathbf{l}_{1:k})$ xác định theo phương pháp đệ quy của Bayes bởi công thức:

$$P(\mathbf{y}_k|\mathbf{l}_{1:k}) = \frac{P(\mathbf{l}_k|\mathbf{y}_k)P(\mathbf{y}_k|\mathbf{l}_{1:k-1})}{P(\mathbf{l}_k|\mathbf{l}_{1:k-1})} \quad (25)$$

Phương pháp lọc hạt ước lượng hàm mật độ xác suất $P(\mathbf{y}_k|\mathbf{l}_{1:k})$ bởi một số lượng lớn các mẫu điểm độc lập nhau $\{\mathbf{y}_k^{(i)}\}_{i=1}^N$ và các trọng số tương ứng của chúng $\{w_k^{(i)}\}_{i=1}^N$ thỏa mãn tổng trọng số bằng 1, trong đó N là số lượng mẫu.

Lọc hạt cập nhật giá trị véc tơ trạng thái và trọng số tương ứng của véc tơ trạng thái theo phương pháp đệ quy đối với mỗi trị đo mới được thêm vào. Trong công thức (25), hệ số chuẩn hóa $P(\mathbf{l}_k|\mathbf{l}_{1:k-1})$ chưa biết. Tuy vậy, hệ số này không cần thiết cho phương pháp tính vì hàm mật độ xác suất $P(\mathbf{y}_k|\mathbf{l}_{1:k})$ hoàn toàn có thể ước lượng bởi:

$$P(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{l}_{1:k}) \propto P(\mathbf{l}_k|\mathbf{y}_k) \cdot P(\mathbf{y}_k|\mathbf{l}_{1:k-1}) \quad (26)$$

Ký hiệu \propto trong công thức (26) thể hiện xác suất được tính trực tiếp từ vế phải. Giả thiết phân bố chuẩn Gauss có độ lệch chuẩn (standard deviation) là σ thì hàm khả năng (likelihood function) $P(\mathbf{l}_k|\mathbf{y}_k)$ được tính:

$$P(\mathbf{l}_k|\mathbf{y}_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\mathbf{l}_k-\mathbf{y}_k)^2}{2\sigma^2}} \quad (27)$$

và $P(\mathbf{y}_k|\mathbf{l}_{1:k-1})$ được ước lượng đối với toàn bộ các hạt (particles):

$$P(\mathbf{y}_k|\mathbf{l}_{1:k-1}) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_k^{(i)}) \quad (28)$$

Trong đó, $\delta(\cdot)$ là hàm gia số Dirac. Đây cũng chính là ý tưởng của phương pháp lọc hạt.

Nhược điểm của phương pháp này là hiện tượng thoái hóa mẫu. Vấn đề nêu trên có thể được giải quyết bởi thuật toán tái chọn mẫu (resampling algorithm). Có nhiều thuật toán cho phép tái chọn mẫu, tuy nhiên thuật toán phổ biến nhất là tái chọn mẫu hệ thống (Systematic Resampling) được phân tích và so sánh trong nghiên cứu của (Douc, 2005). Phương pháp lọc hạt sử dụng tái chọn mẫu SIR có thể được tóm lược theo quy trình sau:

Bước 1. N hạt $\{\mathbf{y}_0\}_{i=1}^N$ được tạo ra theo luật phân bố chuẩn Gauss với mật độ xác suất tại trạng thái ban đầu $P(\mathbf{y}_0)$ $k=0$.

Bước 2. Trọng số của các hạt tương ứng là $w_k^{(i)} = P(\mathbf{l}_k|\mathbf{y}_k^{(i)})$ được tính bởi công thức (27) và trọng số chuẩn hóa được xác định:

$$\tilde{w}_k^{(i)} = \frac{w_k^{(i)}}{\sum_{j=1}^N w_k^{(j)}}, i = 1, 2, \dots, N \quad (29)$$

Bước 3. Một tập hợp mẫu mới $\{\mathbf{y}_k^{(i)}\}_{i=1}^N$ được sắp xếp lại từ tập mẫu hiện tại $\{\mathbf{y}_k^{(i)}\}_{i=1}^N$ bởi thuật toán tái cấu trúc mẫu, trong đó $prob(\mathbf{y}_k^{(i)} = \mathbf{y}_k^{(j)}) = \tilde{w}_k^{(j)}$ (xem Hình 1).

Bước 4. Tại trạng thái $k+1$, những mẫu mới này được truyền qua mô hình hệ thống (theo công thức 1) có dạng: $\mathbf{y}_{k+1}^{(i)} = \phi(\mathbf{y}_k^{(i)}, \mathbf{u}_k^{(i)}, \mathbf{w}_k^{(i)})$, $i = 1, 2, \dots, N$, trong đó nhiều của mô hình hệ thống $\mathbf{w}_k^{(i)}$ được mô phỏng theo phân bố chuẩn Gauss và bỏ qua sai số hệ thống của mô hình.

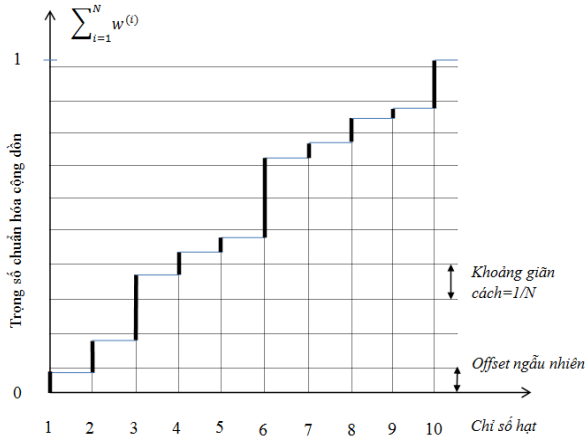
Bước 5. Trạng thái k được tăng lên $k:=k+1$ và quay lại bước 2.

Giá trị véc tơ trạng thái sau khi cập nhật và hiệp phương sai của nó dựa trên thuật toán SIR được tính theo các công thức:

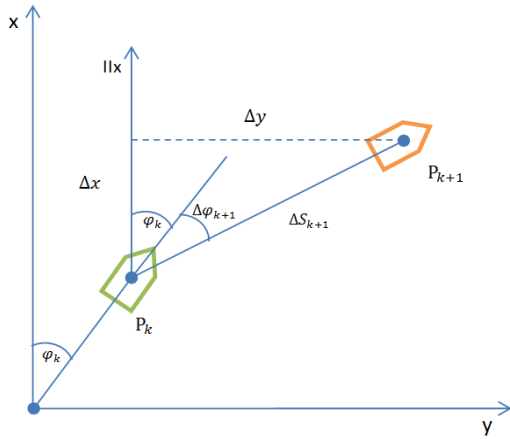
$$\hat{\mathbf{y}}_k = E(\mathbf{y}_k|\mathbf{l}_{1:k}) = \int \mathbf{y}_k P(\mathbf{y}_k|\mathbf{l}_{1:k})d\mathbf{y}_k \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{y}_k^{(i)}, \quad (30)$$

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{y}}_k \hat{\mathbf{y}}_k} = \int (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k)(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k)^T P(\mathbf{y}_k|\mathbf{l}_{1:k})d\mathbf{y}_k \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{y}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_k)(\mathbf{y}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_k)^T \quad (31)$$

Hình 1 biểu diễn giá trị offset ngẫu nhiên được lấy theo phân phối đều $(0,1/N]$ và khoảng giãn cách (interval) là $1/N$. Trục tung thể hiện giá trị trọng số chuẩn hóa $\tilde{w}^{(i)}$ được cộng dồn bởi $\tilde{w}^{(i)} = \sum_{j=1}^i \tilde{w}^{(j)}$. Trong trường hợp này, mẫu hạt thứ 6 được chọn lại 3 lần, mẫu hạt thứ 3 và 10 được chọn lại 2 lần, các mẫu thứ 2, 4 và 8 được chọn lại một lần, còn lại các mẫu hạt thứ 1, 5, 7 và 9 bị loại bỏ (do giá trị trọng số chuẩn hóa rất nhỏ). Do vậy tập mẫu ban đầu $[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]$ sau khi tái lấy mẫu được tập mẫu mới là $[2,3,3,4,6,6,6,8,10,10]$.



Hình 1: Biểu đồ giải thích phương pháp tái chọn mẫu với kích cỡ hạt sử dụng (N=10).



Hình 2: Mô hình hệ thống động.

3. Xây dựng mô hình ứng dụng cho định vị các vật chuyển động

3.1. Mô hình hệ thống động

Mô hình hệ thống động được tạo nên bằng cách mô phỏng chuyển động của một vật thể trên một quỹ đạo đã biết. Véc tơ trạng thái bao gồm hai thành phần của tọa độ mặt phẳng x và y, vận tốc v, góc định hướng phi và góc xoay Delta phi như sau (Schweitzer, 2012):

$$y = [x \quad y \quad \varphi \quad v \quad \Delta\varphi]^T \quad (32)$$

Trong Hình 2, giả thiết rằng vật chuyển động (xe) di chuyển theo một đường thẳng giữa hai điểm đo liên tiếp P_k và P_{k+1}. Thời điểm đo tiến hành trùng khớp với thời điểm dự đoán từ mô hình hệ thống. Tọa độ của điểm dự đoán tại thời điểm k+1 được xác định bởi giá trị tọa độ đã biết ở thời điểm k kết hợp với trị đo cập nhật ở thời điểm đo k+1

gồm: góc định hướng và khoảng cách ngang được xác định trong hệ tọa độ cực. Do đó, véc tơ dự đoán trạng thái theo công thức (1) có dạng sau:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= \hat{x}_k + \Delta S_{k+1} \cdot \cos(\hat{\varphi}_k + \Delta\bar{\varphi}_{k+1}) \\ &= \hat{x}_k + \bar{v}_{k+1} \cdot \Delta t \cdot \cos(\hat{\varphi}_k + \Delta\bar{\varphi}_{k+1}), \\ \hat{y}_{k+1} &= \hat{y}_k + \Delta S_{k+1} \cdot \sin(\hat{\varphi}_k + \Delta\bar{\varphi}_{k+1}) \\ &= \hat{y}_k + \bar{v}_{k+1} \cdot \Delta t \cdot \sin(\hat{\varphi}_k + \Delta\bar{\varphi}_{k+1}), \\ \bar{\varphi}_{k+1} &= \hat{\varphi}_k + \Delta\bar{\varphi}_{k+1}, \\ \bar{v}_{k+1} &= \hat{v}_k, \\ \Delta\bar{\varphi}_{k+1} &= \Delta\bar{\varphi}_k. \end{aligned} \quad (33)$$

Ma trận chuyển dịch trạng thái **T** được xác định:

$$T_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_{1,3} & T_{1,4} & T_{1,5} \\ 0 & 1 & T_{2,3} & T_{2,4} & T_{2,5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \text{với } T_{1,3} &= -\bar{v}_{k+1} \cdot \Delta t \cdot \sin(\hat{\varphi}_k + \Delta\bar{\varphi}_{k+1}), \\ T_{1,4} &= \Delta t \cdot \cos(\hat{\varphi}_k + \Delta\bar{\varphi}_{k+1}), \\ T_{1,5} &= -\bar{v}_{k+1} \cdot \Delta t \cdot \sin(\hat{\varphi}_k + \Delta\bar{\varphi}_{k+1}), \\ T_{2,3} &= \bar{v}_{k+1} \cdot \Delta t \cdot \cos(\hat{\varphi}_k + \Delta\bar{\varphi}_{k+1}), \\ T_{2,4} &= \Delta t \cdot \sin(\hat{\varphi}_k + \Delta\bar{\varphi}_{k+1}), \\ T_{2,5} &= \bar{v}_{k+1} \cdot \Delta t \cdot \sin(\hat{\varphi}_k + \Delta\bar{\varphi}_{k+1}), \end{aligned}$$

Trong đó, Delta t là khoảng thời gian liên tiếp giữa hai trị đo.

Ma trận nhiễu động thái **S** biểu diễn bởi:

$$S_k^T = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{2,1} & 0 & \Delta t & 0 \\ S_{1,2} & S_{2,2} & \Delta t & 0 & \Delta t \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \text{với } S_{1,1} &= \frac{\Delta t^2}{2} \cos(\hat{\varphi}_k + \Delta\bar{\varphi}_{k+1}), \\ S_{1,2} &= -\bar{v}_{k+1} \cdot \Delta t^2 \cdot \sin(\hat{\varphi}_k + \Delta\bar{\varphi}_{k+1}), \\ S_{2,1} &= \frac{\Delta t^2}{2} \cos(\hat{\varphi}_k + \Delta\bar{\varphi}_{k+1}), \\ S_{2,2} &= \bar{v}_{k+1} \cdot \Delta t^2 \cdot \cos(\hat{\varphi}_k + \Delta\bar{\varphi}_{k+1}). \end{aligned}$$

Ma trận hiệp phương sai của nhiễu động thái Sigma_{ww} được cho bởi công thức:

$$\Sigma_{w_k w_k} = \begin{bmatrix} \sigma_{a_w}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\varphi_w}^2 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

Trong đó, sigma_{a_w} và sigma_{phi_w} lần lượt là độ lệch chuẩn của nhiễu bởi gia tốc đo và vận tốc góc đo.

3.2. Mô hình trị đo

Hai loại trị đo đơn giản và phổ biến trong trắc địa là khoảng cách và góc phương vị được sử dụng cho mô hình trị đo trong nghiên cứu này. Theo đó véc tơ trị đo được thiết kế bao gồm khoảng cách và góc ngang được đo từ hai cảm biến đến điểm mục tiêu (xe chuyển động):

$$\mathbf{l}_{k+1} = \left[s_{k+1}^{(1)} \quad s_{k+1}^{(2)} \quad \varphi_{k+1}^{(1)} \quad \varphi_{k+1}^{(2)} \right]^T \quad (37)$$

Trị đo khoảng cách và góc định hướng $s_{k+1}^{(i)}, \varphi_{k+1}^{(i)}$ là hàm số phi tuyến đối với tham số là tọa độ mặt phẳng được biểu diễn bởi:

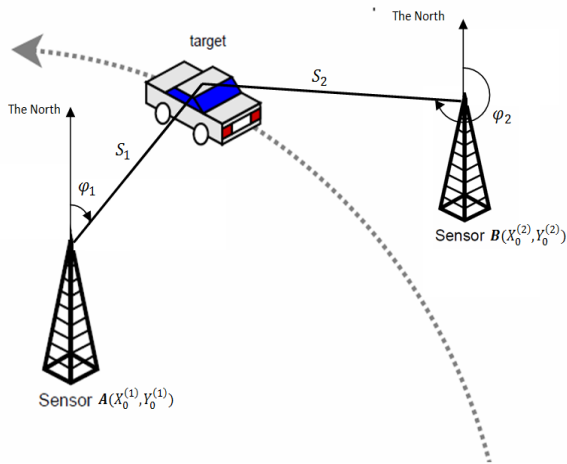
$$\begin{aligned} s_{k+1}^{(i)} &= \sqrt{\Delta x_{k+1}^2 + \Delta y_{k+1}^2} \\ \varphi_{k+1}^{(i)} &= \text{atan} \left(\frac{\Delta y_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

Từ đó, hệ số của ma trận trị đo A được xác định:

$$\mathbf{A}_{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x_{k+1}}{S} & \frac{\Delta y_{k+1}}{S} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta x_{k+1}}{S} & \frac{\Delta y_{k+1}}{S} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta y_{k+1}}{S^2} & \frac{\Delta x_{k+1}}{S^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta y_{k+1}}{S^2} & \frac{\Delta x_{k+1}}{S^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (39)$$

Trong đó, $\Delta x_{k+1} = x_{k+1} - X_0^{(i)}$, $\Delta y_{k+1} = y_{k+1} - Y_0^{(i)}$ và $(X_0^{(i)}, Y_0^{(i)})$ với $i = \{1, 2\}$ là tọa độ mặt phẳng của hai điểm gốc A và B như trong Hình 3. Hình 3 miêu tả chuyển động của xe trên quỹ đạo là một đường cong được tạo bởi tập hợp của vô số những đoạn thẳng liên tiếp. Mỗi đoạn thẳng được xác định trong khoảng thời gian giữa hai lần đo liên tục Δt . Tại từng thời điểm, khoảng cách ngang S_1, S_2 và góc định hướng φ_1, φ_2 được đo từ hai cảm biến đặt tại điểm đã biết tọa độ A và B tới xe chuyển động.

Cuối cùng, ma trận hiệp phương sai của sai số đo xác định:



Hình 3. Đồ hình trị đo góc và khoảng cách.

$$\Sigma_{\mathbf{l}_{k+1} \mathbf{l}_{k+1}} = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varphi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\varphi^2 \end{bmatrix}, \quad (40)$$

Trong đó, σ_s và σ_φ tương ứng là độ lệch chuẩn của sai số đo khoảng cách và góc định hướng với giả thiết độ chính xác đo của cả hai cảm biến tương đương nhau ($\sigma_{S_1} = \sigma_{S_2} = \sigma_s$, và $\sigma_{\varphi_1} = \sigma_{\varphi_2} = \sigma_\varphi$).

4. Kết quả thực nghiệm

Mục đích của thực nghiệm nhằm so sánh kết quả của các phép lọc đã nêu trong mục 3, 4, 5 trên phương diện độ chính xác và thời gian tính toán.

4.1. So sánh độ chính xác ước lượng

Sai số trung phương Root Mean Square Error (RMSE) của tọa độ mặt phẳng được sử dụng để đánh giá độ chính xác của các phép lọc. Sai số trung phương được xác định theo công thức:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [\Delta x^2 + \Delta y^2]}{m}}, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_{true}^{(i)} - x_{est}^{(i)} \\ \Delta y &= y_{true}^{(i)} - y_{est}^{(i)} \end{aligned}$$

Trong đó m là số lượng điểm đo, x_{true}, y_{true} là tọa độ mặt phẳng của các điểm thuộc quỹ đạo đã biết, x_{est}, y_{est} là tọa độ mặt phẳng của các điểm được ước lượng bởi các phép lọc.

Hiện nay, các cảm biến giá rẻ (low-cost sensors) cung cấp các giá trị đo có độ chính xác thấp. Sai số này thường có độ lệch chuẩn lớn và mật độ phân bố xác suất khó đoán định. Bên cạnh đó, thực tế các vật chuyển động thường theo những quỹ đạo có mức độ phi tuyến lớn. Vì vậy, phân tích độ chính xác của các phép lọc cho phương trình phi tuyến sử dụng trị đo có sai số lớn là cần thiết.

Thực nghiệm được mô phỏng trên mô hình bằng cách tạo ra tập số liệu đo trong hai trường hợp. Trường hợp thứ nhất là thay đổi giá trị độ lệch chuẩn của sai số đo và trường hợp thứ hai là thay đổi phân bố xác suất của trị đo. Đối với trường hợp thứ nhất, phương sai của khoảng cách đo thay đổi trong khi phương sai của góc đo không thay đổi. Cụ thể như sau: (i) chọn giá trị độ lệch

chuẩn là 0,1 m cho khoảng cách đo và 0,02 radian cho góc đo; (ii) giá trị độ lệch chuẩn là 0,5 m cho khoảng cách đo và 0,02 radian cho góc đo; (iii) giá trị độ lệch chuẩn là 1,0 m cho khoảng cách đo và 0,02 radian cho góc đo.

Đối với trường hợp thứ hai, phân bố xác suất của trị đo được tạo ra theo luật phân bố chuẩn Gauss và theo luật phân bố phi chuẩn Gauss (phân bố tam giác - Triangular distribution). Kết quả ước lượng của các phép lọc được thực hiện cho 100 điểm đo với thời gian giãn cách giữa hai lần đo liên tiếp (tần xuất đo) là 0,1 giây và số lượng mẫu sử dụng cho phép lọc hạt là 1000.

Bảng 1 cho biết sai số trung phương của ba phép lọc trong trường hợp phương sai thay đổi và sử dụng luật phân bố chuẩn Gauss. Sai số trung phương của PF nhỏ hơn so với EKF và UKF xấp xỉ 1,2 lần đối với phương sai nhỏ ($\sigma_s=0,1m$; $\sigma_\phi=0,02rad$). Sai số trung phương của PF nhỏ hơn khoảng 2 lần và 5 lần so với UKF và EKF đối với phương sai có mức trung bình ($\sigma_s=0,5m$; $\sigma_\phi=0,02rad$). Tương tự như vậy, đối với phương sai lớn ($\sigma_s=1,0m$; $\sigma_\phi=0,02rad$) sai số trung phương của PF nhỏ hơn khoảng 4 lần và 6 lần so với UKF và EKF.

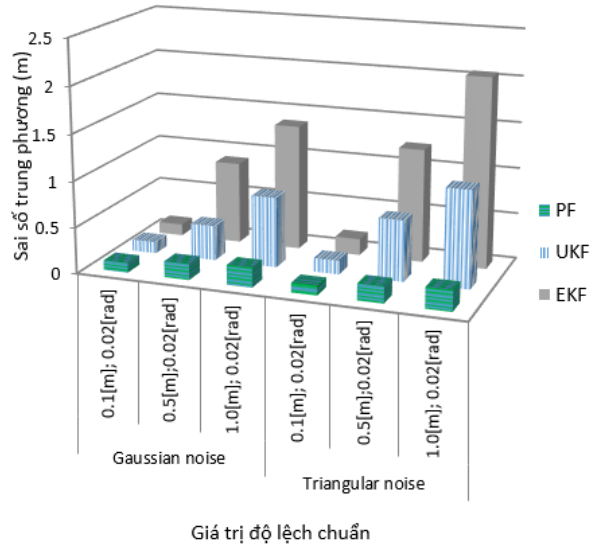
Bảng 2 là sai số trung phương của ba phép lọc sử dụng phân bố phi chuẩn Gauss. Đối với phương sai nhỏ ($\sigma_s=0,1m$; $\sigma_\phi=0,02rad$), sai số trung phương của PF nhỏ hơn 1,2 lần và 1,7 lần so với

Bảng 1: Sai số trung phương của các phép lọc sử dụng phân bố chuẩn Gauss.

Độ lệch chuẩn của trị đo cạnh và góc	Sai số trung phương RMSE (m)		
	PF	UKF	EKF
$\sigma_s=0,1m; \sigma_\phi=0,02rad$	0,106	0,127	0,126
$\sigma_s=0,5m; \sigma_\phi=0,02rad$	0,174	0,379	0,892
$\sigma_s=1,0m; \sigma_\phi=0,02rad$	0,212	0,761	1,368

Bảng 2: Sai số trung phương của các phép lọc sử dụng phân bố tam giác (triangular distribution).

Độ lệch chuẩn của trị đo cạnh và góc	Sai số trung phương RMSE (m)		
	PF	UKF	EKF
$\sigma_s=0,1m; \sigma_\phi=0,02rad$	0,103	0,150	0,178
$\sigma_s=0,5m; \sigma_\phi=0,02rad$	0,180	0,659	1,233
$\sigma_s=1,0m; \sigma_\phi=0,02rad$	0,225	1,050	2,062



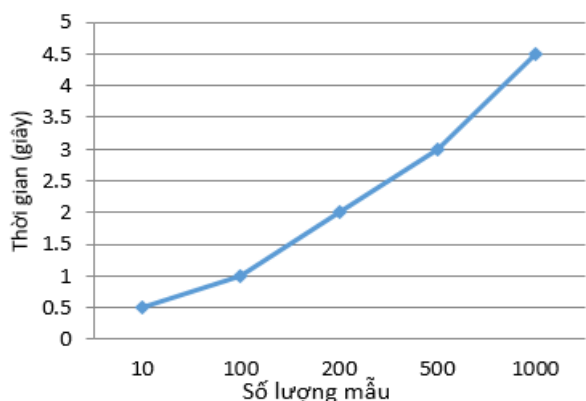
Hình 4: So sánh sai số trung phương trong trường hợp sử dụng nhiễu Gauss và phi Gauss.

UKF và EKF. Đối với phương sai có mức độ trung bình ($\sigma_s=0,5m$; $\sigma_\phi=0,02rad$), sai số trung phương của PF nhỏ hơn 4 lần và 7 lần so với UKF và EKF. Xu hướng tương tự đối với phương sai lớn ($\sigma_s=1,0m$; $\sigma_\phi=0,02rad$), sai số trung phương của PF nhỏ hơn 5 lần và 9 lần so với UKF và EKF.

Hình 4 so sánh sự khác nhau giữa sai số trung phương của ba thuật toán lọc áp dụng đối với nhiễu chuẩn Gauss và phi chuẩn Gauss được tập hợp từ hai bảng dữ liệu 1 và 2. Dễ dàng nhận thấy sai số trung phương của PF chỉ phụ thuộc vào độ lớn phương sai của trị đo mà không phụ thuộc vào quy luật phân bố xác suất của trị đo. Ngược lại, kết quả của EKF và UKF chịu ảnh hưởng bởi cả độ lớn phương sai của trị đo lẫn quy luật phân bố xác suất của trị đo.

4.2. So sánh về mặt thời gian tính toán

Thời gian máy tính thực hiện một thuật toán phụ thuộc vào mức độ phức tạp của thuật toán và cấu hình của máy tính. Nếu coi như các thuật toán được chạy trên cùng một máy tính thì thời gian thực hiện tính toán của các thuật toán khác nhau chỉ phụ thuộc vào mức độ phức tạp của từng thuật toán $O(\cdot)$. Để đánh giá hiệu quả của thuật toán, có thể xét số lượng các phép tính cần thực hiện của thuật toán đó. Thông thường số các phép tính được thực hiện phụ thuộc vào cỡ của bài toán, tức là độ lớn của đầu vào. Vì thế, mức độ phức tạp thuật toán là một hàm phụ thuộc biến số đầu vào. Cụ thể, mức độ phức tạp của thuật toán EKF cần



Hình 5: Thời gian tính của PF đối với sự thay đổi của số lượng mẫu sử dụng phần mềm MATLAB phiên bản R2014 chạy trên nền Windows XP service Pack 3 có tốc độ tính 2,66 GHz Intel Dual Core và bộ nhớ RAM là 4GB.

một phép tính đối với từng phương trình hệ thống và phương trình trị đo thì UKF cần tính $2 \times n + 1$ phép tính (n là kích cỡ của véc tơ trạng thái), trong khi PF cần đến N phép tính (N là số mẫu cần cho PF). Nghiên cứu của (Gustafsson, 2000) chỉ ra rằng đối với EKF nếu chỉ xét đến số hạng bậc nhất trong khai triển Taylor thì mức độ phức tạp của thuật toán này là $O(n_x^3)$ trong đó n_x là tổng số bước tính cho cả phương trình hệ thống và phương trình trị đo. Đối với PF, mức độ phức tạp của thuật toán là $O(Nn_x^2)$. Trong nghiên cứu của (Jose', 2000) cho thấy mức độ phức tạp của thuật toán UKF cao hơn mức độ phức tạp của thuật toán EKF khoảng $O(n)$ lần. Những nghiên cứu nêu trên là cơ sở để đánh giá mức độ phức tạp của từng thuật toán mà ta đang xét. Kết quả so sánh thời gian tính toán của ba thuật toán đã nêu được thực hiện cho phương trình phi tuyến và nhiễu chuẩn Gauss với 100 điểm đo. Thời gian thực hiện tính đối với EKF là $7,5 \times 10^{-4}$ giây và UKF là $5,0 \times 10^{-3}$ giây. PF được khảo sát sự phụ thuộc của thời gian tính đối với số lượng mẫu và được thể hiện chi tiết trong Hình 5.

5. Kết luận

Đối với độ chính xác ước lượng, PF cho kết quả ước lượng chính xác hơn so với EKF và UKF đối với phương trình phi tuyến áp dụng cho cả nhiễu chuẩn Gauss và nhiễu phi chuẩn Gauss. Trong khi PF không bị ảnh hưởng bởi giả thuyết phân bố xác suất của trị đo thì UKF và EKF đều giảm độ chính xác khoảng 1,5 lần nếu phân bố xác suất của trị đo có tính phi chuẩn Gauss. Ngoài ra,

độ chính xác của tất cả các phép lọc trong nghiên cứu này đều chịu ảnh hưởng lớn bởi độ lớn phương sai của trị đo. PF cho kết quả độ chính xác cao nhất trong tất cả các phương án khảo sát trên. Tuy nhiên, trong trường hợp phương sai của trị đo nhỏ thì độ chính xác của các phép lọc này tương đương nhau. Những kết quả trên đây hoàn toàn phù hợp với những lý thuyết đã nêu.

Đối với thời gian tính toán, thuật toán EKF cho phép thực hiện tính toán nhanh nhất, sau đó là thuật toán UKF. Thuật toán PF tốn nhiều thời gian tính nhất do số lượng mẫu đòi hỏi để sử dụng rất lớn.

Tài liệu tham khảo

- Alkhatib, H., Neuman, I., Neuner, H., Kutterer, H., 2008. Comparison of Sequential Monte Carlo Filtering with Kalman Filtering for Non-linear State Estimation. *1st International Conference on Machine Control and Guidance*.
- Anderson, B., Moore, J., 1997. *Optimal filtering*. Prentice-Hall, New Jersey, USA.
- Aussem, T., 1999. Positionsschätzung von Landfahrzeugen mittels Kalman-Filterung aus Satelliten- und Koppelnavigationsbeobachtungen, Veröffentlichung des Geodätischen, *Instituts der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule*.
- Douc, R., Olivier, C., Eric, M., 2005. Comparison of resampling schemes for particle filtering. *Proceedings of the 4th International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis*.
- Efron, B., 1979. Bootstrap methods: Another look at the Jackknife. *The Annals of Statistics*, 7(1), 1-26.
- Gordon, N., Salmond, D., Smith, M., 1993. Novel approach to non-linear/non-Gaussian Bayesian state estimation. *IEE Proceedings*, 140(2), p. 107-113.
- Gustafsson, F., 2002. Particle Filter Theory and Practice with Positioning Applications. *IEEE Transactions on Signal Processing* 50(2), 425-437.
- Jose', L., Juan, A., 2013. Simultaneous Localization and Mapping for Mobile Robots- introduction and method. 1 edition. USA: *IGI Global*.

- Julier, S., Uhlmann, K., 1997. A New Extension of the Kalman Filter to Non-linear Systems. Seattle, Washington, In *The Proceedings of the American Control Conference*.
- Julier, S., Uhlmann, K., 2004. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, 92(3), 401-422
- Kalman, R., 1960. A new approach to Linear Filtering and Prediction Problems. Transaction of the ASME- *Journal of Basic Engineering*, 33-45.
- Liu, J., Chen, R., 1998. Sequential Monte Carlo Methods for Dynamic systems. *Journal of the American Statistical Association* 93(443), pp. 1032-1044.
- Pitt, M., Shephard, N., 1999. Filtering Via Simulation: Auxiliary Particle Filters. *Journal of the American Statistical Association* 94(446), 590-591.
- Ramm, K., 2008. *Evaluation von Filter-Ansätzen für die Positionsschätzung von Fahrzeugen mit den Werkzeugen der Sensitivitätsanalyse*, Reihe C, Nr. 619: DGK.
- Särkkä, S., 2013. Bayesian filtering and smoothing. 1 edition. *Cambridge University Press*.
- Schweitzer, J., 2012. Modular Positioning using Different Motion Models. Stuttgart, Germany, In the *Proceedings on 3rd International Conference on Machine Control and Guidance*.
- Sternberg, H., 2000. Zur Bestimmung der Trajektorie von Lanfahrzeugen mit einem hybriden Meßsystem, Heft 67, Neubiberg: Schriftenreihe des Studiengangs Vermessungswesen der Universität der Bundeswehr München.
- Wan, A., Van der Merwe, R., 2002. *The Unscented Kalman Filter*. Dans: Kalman Filtering and Neural networks. New York: Wiley, 221-282.

ABSTRACT

Ability of filtering algorithms for non-linear model using for positioning

Pham Trung Dung ^{1,*}, Duong Thanh Trung ¹

¹ Faculty of Geomatics and Land Administration, Hanoi University of Mining and Geology, Vietnam.

For the aim of positioning Extended Kalman Filter (EKF), Unscented Kalman Filter (UKF), and Particle Filter (PF) are used to determine location of moving objects. According to high non-linear model with non-Gaussian noise combining with non-Gaussian noise, the accuracy of EKF becomes worse. To overcome the limitation of EKF, the research focuses on algorithms for non-linear and non-Gaussian including UKF and PF. Root mean square error and computational time are parameters to evaluate these algorithms. In terms of accuracy, PF is the best solution for non-linear model with non-Gaussian noise. The result of PF is more accurate 5 and 9 times than UKF and EKF, respectively. In case of Gaussian noise, the accuracy of UKF is higher 1,5 time than EKF. However, in terms of computational time the EKF is the fastest method while the PF needs a great time to run because of generation of samples.

Keywords: Kalman filter, extensional Kalman filter, Unscented Kalman filter, Particle filter, Monte Carlo, non-linear function.